

θα περιγράφουμε τις υποθέσεις σχετικά με τα κλάσματα και την προτεραιότητα.

•  $M/M/1/k$  σύστημα

$k-m$   
θέσεις  
αναμονής

$$\left. \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} m \text{ υπαλλήλοι}$$

1)  $f(t)$  αριθμός πελατών στο σύστημα  $\{f(t), t \geq 0\}$  όπου  $t$  χρονική στιγμή

2) Η πιθανότητα να συμβεί μια αλλαγή στο διάστημα  $(t, t+dt)$  είναι

$$P_{u, u+1}(dt) = P(f(t+dt) = u+1 | f(t) = u) = \begin{cases} \lambda dt + o(dt), & u < k \\ 0, & u = k \end{cases}$$

↑  
πρώτες θέσεις στο σύστημα

3) Η πιθανότητα να τελειώσει μια εξυπηρέτηση στο χρονικό διάστημα  $(t, t+dt)$  & πελάτη που εξυπηρετείται τη χρονική στιγμή  $t$

$$P_{u, u+1}(dt) = \begin{cases} \mu dt + o(dt), & u < m \\ \mu dt + o(dt), & m \leq u \leq k \end{cases}$$

$$\lambda u = \begin{cases} \lambda, & u < k \\ 0, & u = k \end{cases}$$

$$\mu u = \begin{cases} \mu, & u < m \\ \mu, & m \leq u \leq k \end{cases}$$

Αυτό που θέλουμε είναι  $P_n(t) = P(f(t)=n | f(0)=0)$

$$\mu \varepsilon \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$$

Γνωρίζουμε ότι  $P_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \rho_0$  όπου  $\rho_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i}\right)^{-1}$

Με αντικατάσταση των παραπάνω έχω

$$P_n = \frac{\lambda \dots \lambda}{\mu_1 \dots \mu_n} \rho_0 = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n! \cdot \mu^{n-m}} \rho_0, \quad m \leq n \leq k$$

Με αυτές τις πράξεις θα να βρούμε το  $\rho_0$ :

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i} + \sum_{i=m}^k \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i}\right)^{-1} = \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{c^i}{i!} + \sum_{i=m}^k \frac{\tau^i}{m! \cdot m^{i-m}}\right)^{-1} \quad \text{όπου } c = \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

Συνεπώς μπορού να το γράψω ως:

$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} \rho_0 = \frac{\tau^n}{n!} \rho_0 & n < m \\ \frac{\lambda^n}{m! \cdot m^{n-m} \mu^n} \rho_0 = \frac{c^n}{m! \cdot m^{n-m}} \rho_0 & m \leq n \leq k \end{cases}$$

Με λίγες πράξεις ακόμα.

$$\rho_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \sum_{i=m}^k \frac{c^i}{m! \cdot m^{i-m}}\right)^{-1} \quad \text{ή } c = \frac{\lambda}{\mu}$$



$$\hat{n} \quad \rho_0 = \begin{cases} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{c^i}{i!} + \frac{c^m}{m!} \sum_{i=0}^{r-m} \rho^i \right)^{-1}, & \rho = \frac{\lambda}{\mu m} \neq 1 \\ \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{c^i}{i!} + \frac{c^m}{m!} \sum_{i=0}^{r-m} 1 \right)^{-1}, & \rho = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_0 = \begin{cases} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{c^i}{i!} + \frac{c^m}{m!} \frac{(1-\rho^{r-m+1})}{1-\rho} \right)^{-1}, & \rho = \frac{\lambda}{\mu m} \neq 1 \\ \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{c^i}{i!} + \frac{c^m}{m!} (r-m+1) \right)^{-1}, & \rho = 1 \end{cases}$$

→ Εάν ζητούσαν ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \quad \text{αντίστοιχα με το } n \text{ των παραπάνω τύπων}$$

→ Εάν ζητούνταν ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$L_q = 0(\rho_0 + \dots + \rho_m) + \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m) P_n \quad \left( \begin{array}{l} \text{σημαίνει ότι έχουν} \\ \text{καθυφθεί οι υπάλληλοι} \end{array} \right)$$

και με περισσότερες ράφες  $\rho_0 = \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m) \frac{c^m}{m! m^{n-m}}$

→ Μέσος χρόνος αναμονής πελάτη στο σύστημα

$$\lambda(1-\rho_r) \quad \text{law φτάνει στο } r \text{ δεν μπορεί να γίνει αλλος)}$$

$$E(w) = \frac{L}{\lambda(1-\rho_r)}$$

→ Αναμεωόμενος χρόνος στην ουρά  $E(W_q) = \frac{\lambda q}{\lambda(1-\rho_c)}$

Τροποποίηση του συστήματος ως  $M/M/m/\infty$

Σε αυτήν την περίπτωση  $\lambda \rightarrow \infty$  και  $\rho_0 \rightarrow \infty$  άρα πρέπει να βάλω συνθήκες για την σύγκριση:  $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$

Έτσι  $\rho_0 = \left( \frac{\tau^m}{m!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} \right)^{-1}$

και για το  $\rho_n$  για  $m \leq n < \infty$  θα έχω  $m \leq n < \infty$

Για  $\lambda q = \sum_{n=1}^{\infty} n \rho_{n+m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \tau^{n+m}}{m! m^m} \rho_0 = \frac{\rho_0 \tau^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{\tau}{m} \right)^n =$

$= \frac{\rho_0 \tau^m}{m!} \left( \frac{\tau}{m} \right) \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{\tau}{m} \right)^{n-1} = \frac{\rho_0 \tau^{m+1}}{m! m} \cdot \frac{1}{(1-\rho)^2}$

→ Αναμεωόμενος χρόνος στην ουρά:  $E(W_q) = \frac{\lambda q}{\lambda}$

και  $E(w) = \frac{1}{\mu} + E(W_q)$  και  $\lambda = \lambda E(w)$

Τροποποίηση  $M/M/m/m$

Τότε θα έχουμε  $\rho_0 = \left( \sum_{i=0}^m \frac{\tau^i}{i!} \right)^{-1}$ , με  $\tau = \frac{\lambda}{\mu}$ ,  $\rho_n = \frac{\tau^n}{n!} \rho_0$

Στέλνοντας τα  $m \rightarrow \infty$  θα πάρω Poisson  $M/M/\infty/\infty$

$P_n = \frac{\tau^n e^{-\tau}}{n!}$   $P(\lambda/\mu)$



Σύστημα  $u|u|\infty|\infty$

$f(t)$  αριθμός πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή  $t$

$$P_n(t) = P(f(t)=n \mid f(0)=0)$$

$$P_0(0) = 1$$

$$P_j(0) = 0 \quad j \neq 0$$

$$\lambda u = \lambda$$

$$\mu_n = n\mu$$

$$x^0 \frac{d}{dt} P_0(t) + \lambda P_0(t) = 1 \cdot \mu P_1(t)$$

$$x^1 \frac{d}{dt} P_1(t) + (\lambda + 1 \cdot \mu) P_1(t) = 2\mu P_2(t) + \lambda P_0(t)$$

$$x^2 \frac{d}{dt} P_2(t) + (\lambda + 2 \cdot \mu) P_2(t) = 3\mu P_3(t) + \lambda P_1(t)$$

$$x^n \frac{d}{dt} P_n(t) + (\lambda + n \cdot \mu) P_n(t) = (n+1)\mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$p(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) x^n \quad |x| < 1$$

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \lambda p(x,t) + \mu (1 \cdot P_1(t) + 2 \cdot P_2(t) x + \dots + n P_n(t) x^{n-1}) =$$

$$= \mu (1 \cdot P_1(t) x^0 + 2\mu P_2(t) x + \dots + (n+1) P_{n+1}(t) x^n + \dots) +$$

$$+ \lambda (P_0(t) x + P_1(t) x^2 + \dots + P_{n-1}(t) x^n)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) + \lambda p(x,t) + \mu \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \mu \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \lambda x p(x,t)$$

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \mu(x-1) \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \lambda(x-1) p(x,t)$$

είναι της μορφής  $a(x,y) \frac{\partial f}{\partial x} + b(x,y) \frac{\partial f}{\partial y} = g(x,y) f$

από την εξίσωση  $\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)} = \frac{df}{g(x,y) f}$

Από  $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\mu(x-1)} = \frac{dp}{\lambda(x-1)p}$

→ Για το 1<sup>ο</sup> :  $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\mu(x-1)} \Rightarrow \mu dt = \frac{dx}{x-1} \Rightarrow x-1 = u e^{\mu t} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow u = (x-1) e^{-\mu t}$

→ Για το 2<sup>ο</sup> :  $\frac{dx}{\mu(x-1)} = \frac{dp}{\lambda(x-1)p} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{\lambda}{\mu} dx \Rightarrow$

$p = v e^{\lambda/\mu x} \Rightarrow v = P(x,t) e^{-\lambda/\mu x}$

$v = F(u) \Rightarrow P(x,t) e^{-\lambda/\mu x} = F((x-1) e^{-\mu t})$

$P(x,t) = e^{\lambda/\mu x} F((x-1) e^{-\mu t})$

Όμως  $P(x,0) = e^{\lambda/\mu x} F(x-1) \Rightarrow F(x-1) = e^{-\lambda/\mu x}$  άρα

$F(y) = e^{-\lambda/\mu (y+1)}$

$P(x,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu} x} e^{-\frac{\lambda}{\mu} (x-1) e^{-\mu t}} + 1 = e^{\frac{\lambda}{\mu} (x-1) (1 - e^{-\mu t})}$   
 $= e^{-\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})} e^{\frac{\lambda}{\mu} x (1 - e^{-\mu t})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})} \left( \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \right)^n}{n!}$

έτσι  $P_n(t) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})} \left( \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \right)^n}{n!}$

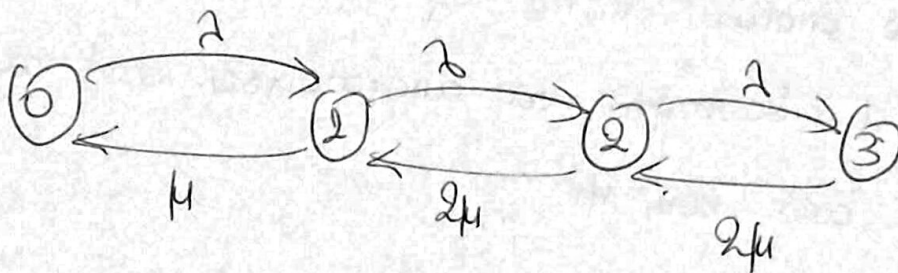
με  $t \rightarrow \infty$  παίρνουμε τον Poisson :  $P_n = \frac{\left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n e^{-\lambda/\mu}}{n!}$   $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$



$\mu | \mu | 2 | \infty$  με  $p(d)$  αψευδώς και χρόνο εξυπηρέτησης  $\text{Exp}(\mu)$ . Να βρεθεί η πιθανότητα ένας πελάτης που έρχεται να αγγίξει άμεσα την εξυπηρέτησή του.

Λύση

Μπορώ να χρησιμοποιήσω τους τύπους για  $m=2$



$$\frac{\lambda}{2\mu} < 1.$$

$$p_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \quad \begin{array}{l} \lambda_i = \lambda \\ \mu_1 = \mu \\ \mu_i = 2\mu \end{array}$$

$$p_0 = \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \right)^{-1}.$$

$$p_n = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{2^{n-1}} p_0$$

$$p_0 = \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{2^{n-1}} \right)^{-1} = \left( 1 + \frac{\tau}{1 - \frac{\tau}{2}} \right)^{-1} = \left( \frac{2+\tau}{2-\tau} \right)^{-1}$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{2-\tau}{2+\tau}, & n=0 \\ \frac{2-\tau}{2+\tau} \frac{\tau^n}{2^{n-1}}, & n \geq 1 \end{cases}$$

Αυτὸ που ζητείται είναι να ἔχω 0 ή 1 ἀρα  $p_0 + p_1$

• Ο μέσος χρόνος παραμονῆς ενός πελάτη στο σύστημα

$$e(\omega) = \frac{L}{\lambda}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\lambda \tau}{(2+\tau)(2-\tau)}$$

Ἐστω ὅτι σε μία χρονική στιγμή 3 πελάτες στο σύστημα  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  εκ των οποίων  $\Pi_1, \Pi_2$  εξυπηρετούνται ενώ ο  $\Pi_3$  στην σειρά. Ποια η πιθανότητα να αποχωρήσει από το σύστημα  
→ Πρώτα ο  $\Pi_3$  από τον  $\Pi_1$

Ἐστω ὅτι  $x_1, x_2, x_3$  υποδιωγμένα χρόνοι εξυπηρέτησής τους

$$x_i \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$\text{Θέλω } x_2 + x_3 \leq x_1 \quad (\text{Ζητείται})$$

Αναγκαστεί να βρει αλλούς στο σύστημα με  $q_n = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$ ,  $n \geq 0$

Να βρεθούν οι οριακές πιθανότητες

Τροποποίηση του  $M | M | 1$

$$\lambda u = \lambda(1 - q_u) = \frac{\lambda}{u+1}$$

$$\text{και } p_0 = \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right)^{-1} = e^{-\lambda/\mu}$$

$$p_n = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} e^{-\lambda/\mu}, \quad p(\lambda/\mu)$$



## Παράδειγμα

-5-

2) Αφίξεις στην μοναδική λωρίδα μιας τράπεζας με Poisson με μέγες αφίξεις 1 αυτοκίνητο / 1 min. Μέσοι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετική με μέσο χρόνο 45 sec. Υποθέτουμε ότι ένα αυτοκίνητο που φτάνει, δέλω να προσδιορίσω τον αναμενόμενο χρόνο που περιμένει ένα αυτοκίνητο για να εξυπηρετηθεί, ω μέσο χρόνο αναμονής στο σύστημα, αυτοκίνητα περιμένουν στο δρόμο και αν η τράπεζα έχει χώρο μόνο για 5 αυτοκίνητα.

### Λύση

$$\mu | \mu | 1 | \infty$$

$$\lambda = 1 \quad \mu = 1.33 \quad \rho = 0.75$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 2.25$$

$$E(W_q) = \frac{L_q}{\lambda} \left( = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \right) = 2.25$$

$$E(w) = E(W_q) + \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{\mu - \lambda} \right) = 3$$

$$1 - \rho_0 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3 - \rho_4 - \rho_5 = 0.178$$

$$\rho_n = (1-\rho)\rho^n$$

2) ~~Αφίξεις στην μοναδική λωρίδα μιας τράπεζας με Poisson~~  
Μια δακτυλογράφος που αναλαμβάνει εργασίες με Poisson  $P(4)$  την ώρα. Όποια εργασία έρθει πρώτα εξυπηρετείται πρώτα. Ο μέσος χρόνος ~~εργασίας~~ για μια εργασία είναι 12 min και ακολουθεί εκθετική κατανομή. Να υπολογιστεί η πιθανότητα μια εργασία που φτάνει, να ολοκληρωθεί σε  $< 45$  και η πιθανότητα όλες οι εργασίες

να έχουν οδοκαλυφθεί αν' την δακτυλογράφια στο τέλος της εργασιμής μέρας

λύση

$$\lambda = 4 \quad \mu = 5 \quad \rho < 1$$

(το αποδεικνύουμε)

~~$$W \sim \text{Exp}(\mu(1-\rho)) = \text{Exp}(\lambda)$$~~

$$\bullet P(0 < W < 0,75)$$

$$\bullet P_0 = 1 \cdot \rho = 0,2$$

3)  $N$  μηχανές και  $K$  χειριστές

πρέπει να βρούμε τον ρυθμό αλλαγών και τον ρυθμό εξυπηρέτησης αφού όταν φτάνει ακοινδοποιεί εκθετική και έρχεται με Poisson με μεγαλύτερη πιθανότητα.

Θα πρέπει να διακρίνουμε 2 περιπτώσεις. Η μία όπου ισχύει για  $N > K$  και μία για  $K < N$

$$\lambda_u = (N-u)\lambda$$

$$\mu_u = \begin{cases} u\mu, & u=1, \dots, K \\ K\mu, & u=K+1, \dots, N \end{cases}$$

$$\bullet K < N$$

$$P_0 = \begin{cases} P_0 \binom{N}{u} \rho^u, & 0 \leq u \leq K \\ P_0 \binom{N}{u} \frac{u!}{K! \cdot K^{u-K}}, & K \leq u \leq N \end{cases}$$

$$P_0 = \left( \sum_{u=0}^K \binom{N}{u} \rho^u + \sum_{u=K+1}^N \binom{N}{u} \frac{u!}{K! \cdot K^{u-K}} \right)^{-1}$$

$$\bullet N \leq K$$

$$P_u = \binom{N}{u} P_0 \rho^u$$

$$P_0 = (1+\rho)^{-N}$$

$$B(N, \frac{\rho}{1+\rho})$$